



TITLE:

# 等質空間における等ホロノミー問題の解 (力学系と微分幾何学)

AUTHOR(S):

谷村, 省吾

---

CITATION:

谷村, 省吾. 等質空間における等ホロノミー問題の解 (力学系と微分幾何学). 数理解析研究所講究録 2004, 1408: 151-158

ISSUE DATE:

2004-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26146>

RIGHT:

数理解析研究所研究集会「力学系と微分幾何学」講究録

2004 年 9 月 9 日講演

等質空間における等ホロノミー問題の解<sup>1</sup>

谷村省吾 (大阪市立大学工学研究科)

Shogo Tanimura

Graduate School of Engineering, Osaka City University, Osaka 558-8585, Japan

e-mail: tanimura@mech.eng.osaka-cu.ac.jp

**等ホロノミー問題:** リーマン多様体  $M$  上の主ファイバー束  $Q$  上の接続と, 2 点  $q_0, q_1 \in Q$  が与えられたとき,  $Q$  上の区分的に滑らかな水平曲線  $q: [0, T] \rightarrow Q$  で  $q(0) = q_0, q(T) = q_1$  を満たすもののうち,  $\pi: Q \rightarrow M$  によって  $M$  に射影された曲線  $x(t) = \pi(q(t))$  が最短となるものを水平最短曲線と呼ぶ. とくに,  $\pi(q_0) = \pi(q_1)$  の場合, 主束の構造群  $G$  の元  $g$  で  $q_0 \cdot g = q_1$  となるものが存在し,  $g$  は  $M$  上の閉ループ  $x(t)$  に伴うホロノミーと呼ばれる. 逆に,  $q_0 \cdot g = q_1$  なる端点を与えられたとき, それらを始点・終点とする水平最短曲線を求める問題を等ホロノミー問題という. 等ホロノミー問題は, 測地線の問題や等周問題の自然な拡張である.

**等周問題:** 等周問題とは, 与えられた長さ  $L$  を持つ平面上の単純閉曲線のうち, 囲む面積  $A$  が最大のものを求めよという問題である. 等周不等式と呼ばれる不等式

$$4\pi A \leq L^2 \quad (1)$$

が成立し, 等号は円のときのみ成立する. すなわち円が等周問題の解である.

余談であるが, 等周問題はディドー (Dido) の問題とも呼ばれ, その名前はローマの詩人ウェルギリウス (BC70~BC19) の叙事詩「アエネイス」に登場する, 王女ディドーにちなむ. BC814 年頃, 東地中海沿岸フェニキアの都市ティルスにディドー (エリッサとも呼ばれる) は王女であったが, 彼女の兄ピグマリオンが彼女の夫であり王であるシュカエウスを殺して王位に就いたため, ディドーは臣下たちと船で逃げ, 北アフリカの岸に到着した. その地で建国しようと考え, その土地の支配者であったヤルバス王から土地を購入しようとした. しかし, ヤルバス王は快く応じず, 「一匹の牛の皮を広げた土地のみ売ってもよい」と答えた. ディドーは, 自分の臣下に命じ, 牛の皮を細く切ってひもにさせ, それをつないで長さ 1km ほどの 1 本のひもを作らせた. そのひもで海岸線から半円を描いて土地を囲んだ. こうして地中海に面したアフリカの地にカルタゴが建設されたという<sup>2</sup>. 「カルタゴ」はフェニキア人の言葉で「新しい街」を意味するという. この土地は現在「ビュルサ (牛皮) の丘」<sup>3</sup>と呼ばれる. カルタゴは海上貿易・工芸・農業経営によって繁栄したが, 後に興ったローマと地中海周辺の権益を巡って争い, 圧迫され, 3 度の戦争を経て BC146 年に滅ぼされた.

**等周問題の拡張としての等ホロノミー問題:** 等周問題には何通りかの自然な拡張がある. 一つは高次元化. すなわち, 与えられた表面積で最大の体積を包めという問題に拡張できる. リー

<sup>1</sup>近畿大学の中原幹夫氏, 京都大学の林大輔氏 (現在富士フィルム) との共同研究にもとづく.

<sup>2</sup>この説明では海岸線を直線, アフリカ大陸の地中海沿岸を下半平面と想定しているが, 実際のカルタゴは地中海に突き出した半島である.

<sup>3</sup>「ビュルサ」はギリシャ語であり, フェニキア語ではないようである.

マン多様体への拡張も同様に定式化される。この方向への拡張は調和写像の理論へと展開していく。境界のある多様体への拡張も意味があるだろう。

もう一つの拡張が等ホロノミー問題である。すなわち、リーマン多様体上の主ファイバー束で与えられたホロノミーを実現する最短の閉曲線を求めよ、という問題を定式化できる。例えば、2次元球面のレヴィ・チヴィタ接続は定曲率（曲率形式が面積の定数倍）なので、閉曲線のホロノミーはそれが囲む面積に比例し、したがって、指定されたホロノミーを実現する最短の閉曲線を求めよという問題は、指定された面積を囲む最短の閉曲線を求めよという問題と等価である。この場合、等ホロノミー問題は等周問題（問題の述べ方はむしろ「等積問題」になっているが）に帰着する。球面の場合、解は小円である。

冒頭で述べたように、一般のリーマン多様体、一般の主ファイバー束、一般の接続に対して等ホロノミー問題は定式化されるのだが、このような一般的な状況で等ホロノミー問題を解くことはまったく手がつけられていないのが現状である。

**物理学からの動機と本稿の目的：** 等ホロノミー問題は、物理的にはベリーの位相 [1, 2] やウィルチェック・ズィーのホロノミー [3] を NMR (Nuclear Magnetic Resonance) などの実験で観測するとき、目標とするホロノミーを実現するような最適制御パラメータを求めたいという動機から自然に現れた。1991 年にモンゴメリー [4] がこの問題を定式化し、ハミルトン形式や部分リーマン幾何学の言葉を用いていくつかの異なった形に問題を書き換えている。等ホロノミー問題は変分問題として定式化され、オイラー・ラグランジュ方程式を書くところまではできるし、とくに  $M$  が等質空間、 $Q$  が等質ファイバー束の場合は、微分方程式の解を書き下すこともできる。一番難しいのは境界条件を満たすことで、任意に指定された始点  $q(0) = q_0$ 、終点  $q(T) = q_1$  に合うように初速度を決めるという問題が一種の逆問題となり、モンゴメリーもこれは hard problem だと書いている。その後、目立った進展はなかったが、近年、量子コンピュータの研究が活発になるに伴って、等ホロノミー問題を解こうという機運が高まってきた。我々 [5, 6] は等質空間の場合について一般の境界条件に対してこの問題を陽に解いたので、これを報告する。

なぜ等ホロノミー問題が量子コンピュータに関係するのか、簡単に説明しておく。量子コンピュータとは、量子力学系の時間発展ユニタリ作用素をある種の論理演算子として利用する「計算機」である。逐次的な計算はユニタリ作用素の列の積で表現される。量子コンピュータの実現に向けてさまざまなレベルの問題とさまざまなアイデアがあるが、ホロノミック量子コンピュータというアイデア [7, 8] は、ハミルトニアンがいくつかのパラメータに依存しているような系（人為的に電場や磁場をかけることができるような系）を持って来て、そのパラメータを時間的にゆっくりと変動させて系を制御することによって所望の時間発展ユニタリ作用素を作ろうとする考えである。このとき、時間発展ユニタリ作用素はある種のホロノミーになると主張するのが、量子力学のベリー・サイモン・ウィルチェック・ズィーの定理 [1, 2, 3] である。量子系のコヒーレント時間<sup>4</sup>内にできるだけたくさんの計算をこなしたいという現実的要請から、制御パラメータのなるべく小さな使用範囲で所望のホロノミーを作りたいという制御問題、すなわち等ホロノミー問題に

<sup>4</sup>コヒーレント時間とは、注目している量子力学系が近似的に閉じた力学系であると見なせる時間スケール。実際の量子力学系は、環境との相互作用など、理論的な取り扱いから取りこぼされた微弱な相互作用を持っているため、閉じておらず、その長時間運動は理論的に定式化されたユニタリ時間発展からずれてくる。

導かれる。

**問題の定式化：**  $k < N$  なる自然数  $k, N$  に対しシュティーフエル多様体  $S_{N,k}(\mathbb{C})$ , グラスマン多様体  $G_{N,k}(\mathbb{C})$  を

$$S_{N,k}(\mathbb{C}) = \{V \in M(N, k; \mathbb{C}) \mid V^\dagger V = I_k\}, \quad (2)$$

$$G_{N,k}(\mathbb{C}) = \{P \in M(N, N; \mathbb{C}) \mid P^2 = P, P^\dagger = P, \text{tr} P = k\} \quad (3)$$

と定義する。ここで  $M(N, k; \mathbb{C})$  は  $N \times k$  行列全体の集合,  $I_k$  は  $k$  次単位行列。射影  $\pi : S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C})$  を

$$\pi : V \mapsto P := VV^\dagger \quad (4)$$

で定義する。行列の積によって  $S_{N,k}(\mathbb{C})$  には右から  $U(k)$  が作用する：

$$S_{N,k}(\mathbb{C}) \times U(k) \rightarrow S_{N,k}(\mathbb{C}), \quad (V, h) \mapsto Vh. \quad (5)$$

この作用は自由であり, かつ  $\pi(Vh) = \pi(V)$  を満たし,  $U(k)$  を構造群とする主ファイバー束  $\pi : S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C})$  を定める。さらに行列の積によって群  $U(N)$  の作用を

$$U(N) \times S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow S_{N,k}(\mathbb{C}), \quad (g, V) \mapsto gV, \quad (6)$$

$$U(N) \times G_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C}), \quad (g, P) \mapsto gPg^\dagger \quad (7)$$

のように定める。この作用は推移的であり, かつファイバー束の射影と可換であることから, 主ファイバー束  $\pi : S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C})$  を等質ファイバー束と呼ぶ。また, 二つの多様体に計量

$$\|dV\|^2 = \text{tr}(dV^\dagger dV), \quad \|dP\|^2 = \text{tr}(dP dP) \quad (8)$$

を導入すれば, おおのリーマン多様体になり, 群の作用は等長変換になる。ファイバー束  $\pi : S_{N,k}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{N,k}(\mathbb{C})$  の各ファイバーの接空間の直交補空間を水平接空間と定めると, 接続形式は

$$A = V^\dagger dV \quad (9)$$

と書かれる。すると, 水平最短曲線を求める問題は, 曲線  $V(t)$  に対する汎関数

$$S[V, \lambda] = \int_0^T \left\{ \text{tr} \left( \frac{dV^\dagger}{dt} \frac{dV}{dt} \right) - \text{tr} \left( \lambda V^\dagger \frac{dV}{dt} \right) \right\} dt \quad (10)$$

の最小値を与える曲線を求める問題である。ここで  $\lambda(t) \in \mathfrak{u}(k)$  は水平条件を課すラグランジュ未定乗数である。曲線  $V(t)$  が水平ならば,  $S$  の値は射影された曲線  $P(t) = \pi(V(t))$  の2乗長さ

$$S = \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{dP}{dt} \frac{dP}{dt} \right) dt \quad (11)$$

に等しい。こうして問題は, 端点を固定された曲線の族のうち汎関数 (10) の停留値とくに最小値を与える曲線を求めよ, という問題として定式化された。

**変分方程式の導出：** 汎関数 (10) の停留条件から変分方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）を導く。シュテューフェル多様体上の曲線  $V(t)$  の変分は任意の滑らかな関数  $\eta(t) \in \mathfrak{u}(N)$  で  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  となるものと、無限小パラメータ  $\varepsilon \in \mathbf{R}$  によって

$$V_\varepsilon(t) = (1 + \varepsilon\eta(t))V(t) \quad (12)$$

と与えられる。停留条件は、変分曲線  $V_\varepsilon(t)$  を (10) に代入してパラメータ  $\varepsilon$  について微分すればゼロであることを要請する：

$$\begin{aligned} 0 = \left. \frac{dS}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \int_0^T \text{tr} \left\{ \dot{\eta}(V\dot{V}^\dagger - \dot{V}V^\dagger - V\lambda V^\dagger) \right\} dt \\ &= \left[ \text{tr} \left\{ \eta(V\dot{V}^\dagger - \dot{V}V^\dagger - V\lambda V^\dagger) \right\} \right]_{t=0}^{t=T} \\ &\quad - \int_0^T \text{tr} \left\{ \eta \frac{d}{dt} (V\dot{V}^\dagger - \dot{V}V^\dagger - V\lambda V^\dagger) \right\} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

両端固定条件  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  より、部分積分で現れた項は消える。こうして変分方程式

$$\frac{d}{dt} (\dot{V}V^\dagger - V\dot{V}^\dagger + V\lambda V^\dagger) = 0 \quad (14)$$

が導かれる。さらに  $\lambda(t)$  についての変分から

$$V^\dagger \frac{dV}{dt} = 0 \quad (15)$$

が導かれる。これは曲線  $V(t)$  が接続 (9) について水平であれという条件式である。

**変分方程式の解：** 我々が解くべき問題は連立方程式 (14), (15) を所与の境界条件の下で解くことである。モンゴメリーはバーの定理 [9] を援用してこの方程式の解を書き下したが、そんなことをしなくても直接解くことができる。つまりこの方程式系は可積分である。まず (14) を 1 回積分して

$$\dot{V}V^\dagger - V\dot{V}^\dagger + V\lambda V^\dagger = \text{const} = X \in \mathfrak{u}(N). \quad (16)$$

水平条件式 (15) のエルミート共役をとると

$$\dot{V}^\dagger V = 0.$$

式 (16) の右から  $V$  をかけて  $V^\dagger V = I_k$  を用いると

$$\dot{V} + V\lambda = XV. \quad (17)$$

この式の左から  $V^\dagger$  をかけて (15) を用いれば

$$\lambda = V^\dagger XV. \quad (18)$$

式 (17) を用いて  $\lambda(t)$  の  $t$  微分を評価すると

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= V^\dagger X \dot{V} + \dot{V}^\dagger XV \\ &= V^\dagger X (XV - V\lambda) + (-V^\dagger X + \lambda V^\dagger) XV \\ &= V^\dagger X XV - V^\dagger XV\lambda - V^\dagger XXV + \lambda V^\dagger XV = -\lambda\lambda + \lambda\lambda = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\lambda(t) = V^\dagger X V = \text{const} = \Omega \in \mathfrak{u}(k) \quad (19)$$

と積分できる。方程式 (17) は  $\dot{V} = XV - V\Omega$  となり、 $X$  と  $\Omega$  が定数であることから

$$V(t) = e^{tX} V_0 e^{-t\Omega} \quad (20)$$

と積分できる。また、(19) は初期値  $V_0$  を用いて

$$\lambda(t) = \Omega = V_0^\dagger X V_0 \quad (21)$$

と書ける。これで積分は終わり。以下に見るように、定数行列  $X$  にはある代数的条件式が課せられる。式 (17) を代入した (16) は

$$(XV - V\Omega)V^\dagger - V(-V^\dagger X + \Omega V^\dagger) + V\Omega V^\dagger = X$$

となり、 $X$  に対する代数方程式

$$X - (VV^\dagger X + XVV^\dagger - VV^\dagger XVV^\dagger) = 0 \quad (22)$$

を導く。さらに具体的に書くために始点として

$$V_0 = \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} \in S_{N,k}(\mathbb{C}) \quad (23)$$

をとる。推移的に作用する群  $U(N)$  に関する対称性があるので、始点をここにとることができる。 $N$  次の歪エルミート行列である  $X$  を次のようにパラメータづける：

$$X = \begin{pmatrix} \Omega & W \\ -W^\dagger & Z \end{pmatrix}. \quad (24)$$

ここで  $W \in M(k, N-k; \mathbb{C})$ ,  $Z \in \mathfrak{u}(N-k)$ . すると条件式 (22) は

$$Z = 0 \quad (25)$$

と同値である。こうして変分方程式 (14), (15) の解は、定数行列  $\Omega \in \mathfrak{u}(k)$  と  $W \in M(k, N-k; \mathbb{C})$  によって

$$V(t) = e^{tX} V_0 e^{-t\Omega}, \quad \lambda(t) = \Omega, \quad X = \begin{pmatrix} \Omega & W \\ -W^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

と与えられることがわかった。行列  $X$  を制御行列と呼ぶ。

**終端値問題：** 上に求めた水平停留曲線をグラスマン多様体に射影した曲線  $P(t) = \pi(V(t))$  が閉ループになれば、 $P(T) = P(0)$ , すなわち

$$e^{TX} V_0 V_0^\dagger e^{-TX} = V_0 V_0^\dagger \quad (27)$$

を満たしていれば、終点  $V(T)$  は  $V(T) = V(0) \cdot \Gamma$  によってホロノミー  $\Gamma \in U(k)$  を定め、それは

$$\Gamma = V^\dagger(0)V(T) = V_0^\dagger e^{TX} V_0 e^{-T\Omega} \quad (28)$$

で与えられる。ホロノミック量子コンピュータは、このホロノミー  $\Gamma$  を所望のユニタリゲートとして用いる。また、解曲線 (26) の長さ (11) は

$$S = \int_0^T \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{dP}{dt} \frac{dP}{dt} \right) dt = \text{tr} (W^\dagger W) T \quad (29)$$

と評価される。そうすると、任意に指定されたユニタリ行列  $U_{\text{gate}} \in U(k)$  に対して  $\Gamma = U_{\text{gate}}$  となり、かつ  $P(T) = P(0)$  となるような制御行列  $X$  を求めよという問題が残る。つまり (27), (28) が  $X$  について解くべき方程式になる。また、もし解曲線が複数個あるなら、その長さ (29) が最小となるものを選ぶという問題が最終的に残る。これを本稿の後半で解く。まず構造群が  $U(1)$  の場合を解いて、一般の  $U(k)$  を構造群とする問題は  $U(1)$  の直和と見なして解くという方針を採る。

**$U(1)$  の場合を解く:**  $N = 2, k = 1$  の場合を考える。このとき等質ファイバー束  $\pi: S_{2,1}(\mathbb{C}) \rightarrow G_{2,1}(\mathbb{C})$  は  $U(1)$  を構造群とするホップ束  $\pi: S^3 \rightarrow S^2$  である。対応するホロノミーはベリーの位相と呼ばれる。サイクル時間を  $T = 1$  に規格化しておく。実数  $w_1, w_2, w_3$  で制御行列を

$$X = \begin{pmatrix} 2iw_3 & iw_1 + w_2 \\ iw_1 - w_2 & 0 \end{pmatrix} = iw_3 I + i \sum_{j=1}^3 w_j \sigma_j \quad (30)$$

とパラメータづける。その指数関数は

$$e^{tX} = e^{itw_3} (I \cos \rho t + i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \rho t) \quad (31)$$

となる。ここで

$$\rho := \|\mathbf{w}\|, \quad \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \mathbf{n} \quad (32)$$

とおいた。対応する水平停留曲線は

$$V(t) = e^{tX} V_0 e^{-t\Omega} = e^{-itw_3} \begin{pmatrix} \cos \rho t + i n_3 \sin \rho t \\ (i n_1 - n_2) \sin \rho t \end{pmatrix} \quad (33)$$

となり、これを  $S^2$  上に射影した曲線は

$$\begin{aligned} P(t) &= V(t) V^\dagger(t) \\ &= \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \left[ \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_3 - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3)) \cos 2\rho t - (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_3) \sin 2\rho t \right] \end{aligned} \quad (34)$$

となる。これは北極点  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  を  $\mathbf{n}$  を軸として左手の方向に角度  $2\rho t$  だけ回した点であり、その軌跡は小円になる。時刻  $t = 1$  に  $S^2$  上でループを閉じるためには、 $2\rho = 2\pi n$ 、すなわち

$$\rho = \|\mathbf{w}\| = n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (35)$$

でなければならない。点  $P(t)$  は時間  $0 \leq t \leq 1$  の間に小円上を  $n$  回なぞる。終点におけるホロノミーは

$$\Gamma = V_0^\dagger e^X V_0 e^{-\Omega} = e^{-i(w_3 - n\pi)} \quad (36)$$

と求められる。これが所望のユニタリゲート  $U_{\text{gate}} = e^{i\gamma}$  と一致するためには制御パラメータは

$$w_3 = n\pi - \gamma, \quad (37)$$

$$w_1 + iw_2 = e^{-i\phi} \sqrt{(n\pi)^2 - (n\pi - \gamma)^2} \quad (38)$$

と決められる。ここで実数  $\phi$  は不定。非ゼロの整数  $n$  は  $(n\pi)^2 - (n\pi - \gamma)^2 > 0$  の範囲にあることを要求される。そのような  $n$  の分だけ複数個の解が存在する。  $S^2$  上の曲線の長さは

$$S = \text{tr}(W^\dagger W) T = (n\pi)^2 - (n\pi - \gamma)^2 \quad (39)$$

と評価される。  $\gamma$  の値を  $0 \leq \gamma < 2\pi$  の範囲に取るなら、  $n = 1$  が最短曲線を与える。結局、  $U_{\text{gate}} = e^{i\gamma}$  をホロノミーとして与える最適制御行列は

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2i(\pi - \gamma)}{ie^{-i\phi}\sqrt{\pi^2 - (\pi - \gamma)^2}} & ie^{i\phi}\sqrt{\pi^2 - (\pi - \gamma)^2} \\ ie^{-i\phi}\sqrt{\pi^2 - (\pi - \gamma)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

である。

**U(k) の場合を解く：** 方針は、目標とするホロノミーすなわちユニタリゲート  $U_{\text{gate}} \in U(k)$  を対角化してしまえば、  $k$  個の  $U(1)$  の元の固有値に分解されるので、  $U(1)$  のときの制御行列を  $k$  個直和して、対角化を逆にたどれば解を得るという方針である。この構成法では  $N = 2k$  のときに終端値問題を解くことができる。以下、終端時刻  $T = 1$  とする。

解法は3段階に分かれる。第1段階：与えられた  $U_{\text{gate}}$  を対角化する：

$$R^\dagger U_{\text{gate}} R = U_{\text{diag}} = \text{diag}(e^{i\gamma_1}, \dots, e^{i\gamma_k}). \quad (41)$$

ここで  $R \in U(k)$ 。各固有値  $\gamma_j$  は  $0 \leq \gamma_j < 2\pi$  の範囲に取る。第2段階： $k$  次正方行列

$$\Omega_{\text{diag}} = \text{diag}(i\omega_1, \dots, i\omega_k), \quad \omega_j = 2(\pi - \gamma_j), \quad (42)$$

$$W_{\text{diag}} = \text{diag}(i\tau_1, \dots, i\tau_k), \quad \tau_j = e^{i\phi_j} \sqrt{\pi^2 - (\pi - \gamma_j)^2} \quad (43)$$

を定める。ここで  $\phi_j$  は任意の実数。これらを組み合わせて制御行列

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \Omega_{\text{diag}} & W_{\text{diag}} \\ -W_{\text{diag}}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

を作る。これは  $k$  個のベリ一位相を直和していることに相当する。第3段階：対角化を戻して

$$X = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{\text{diag}} & W_{\text{diag}} \\ -W_{\text{diag}}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^\dagger & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\Omega_{\text{diag}}R^\dagger & RW_{\text{diag}} \\ -W_{\text{diag}}^\dagger R^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

としたものが求めるべき制御行列である。式 (41)-(45) で与えた解法が今回の主たる結果である。論文 [5] では、Hadamard, CNOT, 離散フーリエ変換など、代表的なユニタリゲートに対して最適制御行列をあらわに求めた。

**課題：** 等質ファイバー束を考えるとということは、量子系で言えば、エネルギー固有空間を任意に動かすことができるくらいの物理的制御パラメータがあるということを意味する。これは現



実的な仮定ではない。現実利用可能なパラメータは等質ファイバー束よりもずっと小さな多様体なので、そこで問題を解くべきなのだが、対称性が悪くなるので陽な解を書くことは難しい。

**他の研究の紹介：** 藤井氏 [10] は調和振動子のコヒーレント状態の上でウィルチェック・ズィーの接続を計算した。中原氏ら [11, 12] は、制御パラメータ空間内の折れ線経路を用いて最適制御を探索するという方法を提唱し、数値解析した。最近、中原氏らのグループ [13] は、NMR の実験においてホロノミックではない量子コンピュータの最適制御に成功した。また、トポロジ的最適化とも呼ぶべきワープ短縮法 [14] も考案している。

**コメントと謝辞：** 今回示した終端値問題の解の構成は  $N = 2k$  ないし  $N > 2k$  の場合に適用できる。本研究集会において、藤井氏、宮崎氏、楯氏らから解は  $N < 2k$  の場合でも同様に構成できることを示唆され議論をしていただいた。それでもなお  $N < 2k$  への拡張は非自明と思われる。また桑原氏、清原氏には等ホロノミー問題と部分リーマン幾何学との関連を指摘していただいた。本講演に注意を払って下さって、示唆と議論をして下さった本集会の出席者の皆さんに感謝します。

## 参考文献

- [1] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).
- [2] B. Simon, Phys. Rev. Lett. **51**, 2167 (1983).
- [3] F. Wilczek, A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52**, 2111 (1984).
- [4] R. Montgomery, Commun. Math. Phys. **128**, 565 (1991).
- [5] S. Tanimura, M. Nakahara, D. Hayashi, *Exact solutions of the isoholonomic problem and the optimal control problem in holonomic quantum computation*, To be published in J. Math. Phys.; quant-ph/0406038.
- [6] S. Tanimura, D. Hayashi, M. Nakahara, Phys. Lett. A **325**, 199 (2004); quant-ph/0312079.
- [7] J. Pachos, P. Zanardi, M. Rasetti, Phys. Rev. A **61**, 010305(R) (1999); quant-ph/9907103.
- [8] 中原幹夫「幾何学と量子計算」(別冊・数理科学「量子情報科学とその展開」p.79-86)
- [9] C. Bär, *Carnot-Caratheodory-Metriken*, Diplomarbeit, Bonn (1988).
- [10] K. Fujii, J. Math. Phys. **41**, 4406 (2000); quant-ph/9910069.
- [11] A. O. Niskanen, M. Nakahara, M. M. Salomaa, Phys. Rev. A **67**, 012319 (2003); quant-ph/0209015.
- [12] A. O. Niskanen, M. Nakahara, M. M. Salomaa, Quantum Info. Comput. **2**, 560 (2002).
- [13] M. Nakahara, Y. Kondo, K. Hata, S. Tanimura, Phys. Rev. A **70**, 052319 (2004); quant-ph/0405050.
- [14] M. Nakahara, J. J. Vartiainen, Y. Kondo, S. Tanimura, K. Hata, *Warp-drive quantum computation*, quant-ph/0411153.